# Wissenschaftlich fundierte Hypothese der Existenz einer physikalischen fünften Dimension

Dr.-Ing. Detlef Hoyer

9.9.99

ABSTRACT

Für euklidische Räume wird die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ und die einer Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ auf vier räumliche Dimensionen übertragen: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2$ . Man erhält analog der Kugeloberfläche einen in sich gekrümmten dreidimensionalen riemannschen Raum, der unbegrenzt und zyklisch ist. In allen Raumrichtungen kommt man nach Durchlaufen einer Strecke $n * 2\pi R$ wieder an den Ausgangspunkt zurück. Der Raum ist endlich, denn sein Volumen beträgt $2\pi^2 R^3$. Unter Hinzunahme der Zeit als weitere Dimension erhält man in dieser "Kugeloberfläche" direkt eine Metrik, die dem Robertson-Walker-Weltallmodell entspricht. Eine zusätzliche Zeitabhängigkeit des Radius $R(t) = v_0 * t$ führt auf eine von der Expansionsgeschwindigkeit $v_0$ unabhängige Hubble-Konstante, deren Kehrwert gleich der Expansionszeit $t$, dem Weltalter ist.

## 1 Geschichtliches zur Geometrie

Geometrie im ursprünglichen Sinn wurde im alten Ägypten als Landvermessung betrieben, um die Felder nach einer Nilüberschwemmung neu einteilen zu können. Im 6. Jh. v. Chr. wurde sie von den Griechen übernommen und zur Lehre von den Eigenschaften räumlicher Figuren ausgebaut. Euklid lehrte um 300 v. Chr. in Alexandria das Parallelenaxiom, wonach durch einen außerhalb einer Geraden liegenden Punkt zu dieser Geraden nur eine Parallele gezogen werden kann.

Nachdem in über 2100 Jahren die Euklidische Geometrie durch Entwicklungen der Chinesen, Inder und Araber ein Teilgebiet der Mathematik geworden war, begann das Ende dieser Geometrie mit Gauß, der keinen Grund dafür sah, warum es nicht auch gekrümmte Räume geben sollte, bei denen durch einen Punkt außerhalb einer Geraden mehr als eine Parallele gezogen werden kann.

Als sich 1832 sein Schulfreund Bolyai mit einer Arbeit seines Sohnes über eine nichteuklidische Geometrie auf trichterförmigen, negativ gekrümmten Flächen wandte, wagte er es nicht, dies zu veröffentlichen. Die Veröffentlichung einer solchen hyperbolischen Geometrie geschah kurz darauf durch Lobatschewski.

Als das Eis nun gebrochen war unterstützte Gauß seinen Schüler Rieman- n, der eine abstrakte mathematische Theorie gekrümmter mehrdimensionaler Räume entwarf. Sie wurden anstatt durch Axiome durch eine innere Maßbestimmung festgelegt. Wichtige Begriffe für Riemannsche Räume wurden gebilde- t: Metrik, Weglänge, geodätische Linien, Gaußsche Krümmung, Riemannscher Krüm- mungstensor und allgemeine Koordinatentransformation.

Diese schwer vorzustellende mathematische Abstraktion des uns geläufigen Euklidischen Raumes bekamen durch Einsteins Arbeit einen realen physikalischen Sinn. Das von ihm aufgrund allgemeiner Überlegungen postulierte Äquivalenzprinzip[1] führte darauf, daß sich Gravitation durch Koordinatentransformation zwischen beschleunigten Bezugsystemen beschreiben lassen mußte und somit eine Krümmung der Raumzeit bedeutete. Einsteins Gravitationsgleichung verknüpfte diese Raumkzeitrümmung mit der dazugehrigen Quelle, der Massenverteilung.

## 2 Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel

Zu den uns geläufigen drei räumlichen Dimensionen nehmen wir eine vierte räumliche Dimension hinzu. Mathematisch bedeutet das keine Schwierigkeit. Genauso wie man einen mit den Koordinaten x,y,z parametrisierten Würfel entlang seiner Höhe z in x,y-Schichten schneiden kann, so können wir uns unseren vierdimensionalen Raum entlang seiner vierten Dimension $u$ in dreidimensionale x,y,z-Schichten geschnitten denken. Es entstehen unendlich viele parallele dreidimensionale Räume. Paralleluniversen sind mathematisch kein Problem. Wir wollen im folgenden die vierte Dimension $u$ auch Höhe nennen.

Nun betrachten wir alle Punkte mit den Koordinaten x,y,z,u, die den gleichen Abstand $R$ vom Ursprung (0,0,0,0) haben.

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = R^2 = const. \tag{1}$$

Weil dies die Übertragung der Kreisgleichung und Kugelgleichung auf vier Dimensionen ist, nennen wir die durch diese Gleichung beschriebene Punktmenge die Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel.

Diese Punktmenge ergibt auch eine zusammenhängende dreidimensionale Schicht, denn z.B. für den Punkt mit maximaler Höhe $u = R$, wo $x$=0, $y$=0, $z$=0 sind, gibt es Nachbarpunkte in drei verschiedenen Richtungen: x,y und z. Diese Nachbarpunkte haben auch den Abstand $R$ vom Ursprung, liegen aber auf drei verschiedenen Koordinatenachsen. Die Schicht ist gekrümmt, denn für jeden

[1] Äquivalenz von Schwerkraft und Trägheit, Masse und Energie, frei fallende Bezugssysteme und im leeren Raum schwebende Bezugssysteme.

dieser Nachbarpunkte ist $R$ etwas gekippt, x,y,z sind nicht mehr Null, $u$ ist schon kleiner als $R$ und die zu $R$ senkrechten Koordinatenachsen (Tangenten) sind gegen die im Zenit-Punkt betrachteten Koordinatenachsen ein wenig geneigt.

In dieser gekrümmten Schicht kann man sich im konstant bleibenden vierdimensionalen Abstand $R$ um den Ursprung herumbewegen. Daher kann man diese Schicht als Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel betrachen. Die Schicht hat in jedem Punkt drei senkrecht aufeinander stehende Achsen, auf denen man sich weiter in der Schicht bewegen kann, die Schicht stellt also einen gekrümmten dreidimensionalen Raum dar.

# 3 Metrik in der Kugeloberfläche

Gl.(1) ist der Satz des Pythagoras für ein Pentagon im vierdimensionalen euklidischen Raum. Die analoge Definition für denselben Raum als Riemannschen Raum geschieht über das Linienelement $ds$. Man bekommt $R$ indem man über das Linenelement integriert.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 \tag{2}$$

Im folgenden wollen wir nun die Metrik für den gekrümmten dreidimensionalen Raum aufstellen. Dazu muß zunächst die Variable $u$ ersetzt werden (Abschnitt 3.1). Danach ist ein Wechsel zu Polarkoordinaten nötig (Abschnitt 3.2), um dann die Metrik mit Parametern des gekrümmten dreidimensionalen Raumes darzustellen (Abschnitt 3.3).

## 3.1 Ersetzung von $u$ durch $x$, $y$, $z$ und $R$

Die Punkte der dreidimensionalen Oberfläche mit konstantem vierdimensionalen Abstand $R$ vom Ursprung wollen wir durch drei Parameter der Schicht selbst darstellen. Dazu ersetzen wir die Höhe $u$ anhand der Gl.(1) durch $x$, $y$, $z$ und $R$:

$$u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \tag{3}$$

Dadurch betrachten wir nur die Punkte der Äquatorialebene $x$, $y$, $z$ mit der Höhe $u = 0$ und können so zu jedem dieser Punkte die Höhe $u$ nach Gl.(3) bestimmen. Zu jedem Punkt der Äquatorialebene gibt es einen Punkte der Schicht im Abstand $u$ auf der Nordhalbkugel und einen auf der Südhalbkugel.

Diese Ersetzung hilft uns auch bei der Aufstellung der Metrik in der Kugeloberfläche, durch deren Integration man Abstände von Punkten, in der Oberfläche gemessen, ausrechnen kann. Durch Ableitungen von Gl.(3) erhält man

$$du = -\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \tag{4}$$

Dies können wir sogleich in die Formel für das Linenelement Gl.(2) einsetzen:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(xdx + ydy + zdz)^2}{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} \tag{5}$$

Das ist die Metrik eines dreidimensionalen Raumes mit konstanter positiver Krümmung, parametrisiert nach Punkten der Äquatorialebene.

## 3.2 Wechsel zu Polarkoordinaten

Um die Metrik im dreidimensionalen gekrümmten Raum selbst darzustellen, wechseln wir zunächst in der Äquatorialebene zu Polarkoordinaten $\rho$, $\theta$, $\phi$:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad \phi = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

woraus sich $x = \rho\cos\phi\cos\theta$, $\ y = \rho\sin\phi\cos\theta$, $\ z = \rho\sin\theta$ ergibt. Für Polarkoordinaten ist das Linienelement

$$d\overline{s}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7}$$

Gl.(4) wird in Polarkoordinaten:

$$du = -\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}} = -\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \tag{8}$$

Gl.(7) und Gl.(8) eingesetzt in Gl.(5) ergibt:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \frac{(\rho d\rho)^2}{R^2 - \rho^2} \tag{9}$$

und nach einiger Umformung

$$ds^2 = \frac{(d\rho)^2}{1 - \rho^2/R^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{10}$$

Das ist die Gl.(5) in Polarkoordinaten.

## 3.3 Die Metrik des dreidimensionalen gekrümten Raumes

Mit Polarkoordinaten können wir die Metrik in der Oberfläche mit deren Parametern beschreiben. Wir wechseln von der Äquatorialebene in die Oberfläche, in dem wir jeden Punkt der Äquatorialebene über die Höhe $u$ auf die Oberfläche projizieren. Ausgehend vom Punkt mit maximaler Höhe $u = R$, sozusagen dem Nordpol, können wir die Koordinaten $\theta$ und $\phi$ vom Ursprung $u = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ übernehmen:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right), \quad \phi = \arcsin\left(\frac{y}{x}\right) \tag{11}$$

Nur bei der Radiuskoordinate muß eine Veränderung vorgenommen werden. Über die Radien $R$ und $\rho$ ist nach Gl.(3) die Höhe $u$ festgelegt, damit auch der Winkel $\chi$ zwischen den Radien und auch die Bogenlänge $b$ in der Oberfläche vom Nordpol bis zum betrachteten Punkt.

$$\sin\chi = \frac{\rho}{R}, \qquad b = \chi R \tag{12}$$

Eine Zwischenrechnung

$$\chi = \arcsin\left(\frac{\rho}{R}\right)$$

$$\frac{d\chi}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}}}\frac{1}{R}$$

ergibt folgende Ersetzungen:

$$R^2 d\chi^2 = \frac{d\rho^2}{1-\frac{\rho^2}{R^2}}$$

$$\rho^2 = R^2\sin^2\chi$$

Diese eingesetzt in Gl.(10)

$$ds^2 = R^2(d\chi^2 + \sin^2\chi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

führt auf die gesuchte Metrik in Polarkoordinaten der Oberfläche

$$ds^2 = db^2 + R^2\sin^2\frac{b}{R}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Die Bogenlänge $b$ erscheint im dreidimensionalen Raum als Entfernung $r$:

$$ds^2 = dr^2 + R^2\sin^2\frac{r}{R}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{13}$$

Der Faktor $\sin\frac{r}{R}$ zusammen mit $R$ ergibt den Radius $\rho_u$ den man erhält, wenn man den Urspung im Abstand $r$ umläuft und den dabei gemessenen Umfang durch $2\pi$ teilt. Er wächst zunächst wie $r$, erreicht das Maximum $R$ bei $\sin\frac{r}{R} = 1$ also $r = \frac{\pi}{2}R$ und wird danach wieder kleiner, bis er bei $r = \pi R$ wieder Null ist. Mit $r = \pi R$ ist ein halber Umlauf, mit $r = 2\pi R$ ein ganzer Umlauf vollzogen.

### 3.4 Das Volumen des dreidimensionalen gekrümten Raumes

Eine Kugelschale im Abstand $r$ der Dicke $dr$ hat das Volumen:

$$dV = 4\pi R^2\sin^2\left(\frac{r}{R}\right)dr \tag{14}$$

Dies integriert über $Rd(r/R)$ von 0 bis $\pi$ ergibt:

$$V = 4\pi R^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) R \tag{15}$$

Damit ist das Gesamtvolumen des gekrümmten dreidimensionalen Raumes mit konstantem Krümmungsradius $R$ :

$$V = 2\pi R^3 \tag{16}$$

## 4 Lösung der Gravitationsgleichung für konstante Dichte

Die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation verknüpfen die Raumkrümmung mit den im Raum vorhandenen Massen. Sind die Massen homogen, also gleichmäßig, verteilt und bewegen sie sich nicht gegeneinander, so ist die Krümmung im Raum überall gleich und unabhängig von der Zeit. Die Krümmung des Raumes läßt sich dann durch eine einzige Größe, den Krümmungsradius, beschreiben. Löst man die Einsteinschen Feldgleichungen für eine solche homogene, isotrope und statische Massenverteilung, so erhält man die Robertson-Walker-Metrik (RWM):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + R^2 \sin^2 \frac{r}{R} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{17}$$

Sie unterscheidet sich nur durch den Zeitterm $-c^2t^2$ von der im vorigen Kapitel hergeleiteten Metrik. Dies läßt den Schluß zu, daß sie äquivalent zu einem solchen dreidimensionalen Raum mit überall gleichem Krümmungsradius ist, der als dreidimensionale "Oberfläche" einer vierdimensionalen Kugel verstanden werden kann.

Eine solche Massenverteilung ist nicht stabil, wenn keine Kräfte vorhanden sind, die die Massen auseinanderhalten, wie zum Beispiel der thermische Druck in einem Stern. Aufgrund der Gravitationswirkung stürzen die Massen zusammen und enden nach einer bestimmten Zeit in einem Schwarzen Loch. Man benützt die RWM, um diesen Vorgang in der Eigenzeit $t$ zu beschreiben. Der Krümmungsradius $R$ geht dann als zeitabhängige Lösung $R(t)$ als Skalierungsfaktor in die Metrik ein:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 dr^2 + R^2(t) \sin^2 \frac{r}{R(t)} \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{18}$$

Dadurch behalten die Massen immer die Koordinaten, die sie einmal gehabt haben. Die Veränderungen werden dadurch beschrieben, daß sich das gesamte Koordinatensystem proportional zu $R(t)$ verändert.

Umgekehrt kann das Koordinatensystem und damit die "Kugeloberfläche" auch expandieren. $R(t)$ wird mit der Zeit größer, wodurch sich die dreidimensionale "Oberfläche" wie eine Luftballonhülle aufbläht und gut die Expansion des Weltalls beschreibt. Damit sind die Relativgeschwindigkeiten und die dadurch verursachte Rotverschiebung nach dem Hubble-Gesetz erklärbar.

Der Umfang $2\pi R$ wchst ebenfalls mit $R$. Ändert sich $R(t)$ nur langsam, so treten nur geringe Relativgeschwindigkeiten auf und Licht kann das ganze Universum durchlaufen, um nach einer Umlaufzeit $T = 2\pi R/c$ wieder am Ausgangspunkt zu erscheinen. Das gesamte Weltall wäre dadurch in einem Wirkungszusamenhang.

Ist die zeitliche Änderung von $R(t)$ gerade $c/2\pi$, so entfernt sich ein Punkt im Abstand $D = 2\pi R$ gerade mit Lichtgeschwindigkeit, daß heißt der Selbstbeobachtungspunkt verschwindet gerade am Beobachtungshorizont mit unendlicher Rotverschiebung.

Bei schnellerer zeitlicher Änderung von $R(t)$ ist der Beobachtungshorizont schon in kürzerem Abstand erreicht und der dahinterliegende Teil steht nicht mehr in einem Wirkungszusammenhang mit dem Ausgangspunkt.

Wird die zeitliche Änderung von $R(t)$ als konstant angenommen $R(t) = wt$, so muß es einen Zeitpunkt $t_0 = 0$ gegeben haben, zu dem auch der Radius $R = 0$ war. Dadurch wird die Zeit $t$ zum Alter des Weltalls. Die Erweiterung des Umfangs $2\pi w$ geteilt durch den Umfang $2\pi R(t) = 2\pi wt$ ergibt die Hubble-Konstante: $\frac{2\pi w}{2\pi wt} = \frac{1}{t} = H_0$ Mit $H_0 = 50$ km/sec je Mio parsec (1 parsec = 3,26 Lichtjahre) ergibt dies für $t$ ca. 15 Mrd. Jahre. Die Zunahme von $R(t)$ wird aber vermutlich wegen der Gravitationswirkung im Laufe der Zeit geringer werden.

# 5 Zusammenfassung

Die Übereinstimmung des räumlichen Teils der Robertson-Walker-Metrik mit der Metrik, die man durch Bilden der dreidimensionalen Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel erhält, ergibt die Möglichkeit eines wie die Oberfäche eines Luftballons geschlossen, zyklischen, endlichen Weltalls. Es hätte dann ein endliches Volumen von $2\pi^2 R^3$ mit einem Radius $R$ von ca. 15 Mrd. Lichtjahren. Dieses Weltall ist in einem fünfdimensionalen euklidischen Raum vorstellbar: vier Raumachsen x, y, z, u (Kugel) und eine Zeitachse t.